ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ

Отчет по лабораторной работе по дисциплине: Вероятностные модели инфокоммуникационных процессов

Студента заочного отделения
2 курса 12002153 группы
Пасивенко А.Ю.

Проверил:
Асс. Ст. Пр. Голощапова В.А.

Белгород 2023

Лабораторная работа №2. Статистическая обработка результатов наблюдений

Цель работы: «Изучение основных понятий теории вероятности, ознакомление с основными характеристиками случайных величин и возможными способами их экспериментального определения».

1. Построение вариационного ряда.

Сформировать псевдослучайную последовательность (длиной 5000 значений), имеющую равномерный закон распределения. Последовательность постройте на основе линейного конгруэнтного генератора:

$$x_{n+1} = (x_n \cdot a + b) \bmod m, \quad n = 1, \ldots, m \qquad (1)$$

Листинг датчика на основе алгоритма сложения:

```
a = 565;
c = 323;
m = 56238423983;
x = ones;
n = 1000;
u = 1/m;
for i=1:n
    x(i+1) = mod((a*x(i)+c),m);
    u(i+1) = x(i+1)/m;
end
figure
histogram(u,n);

M = sum(u)/n;
disp("M = "); disp(M);
Dr = zeros;
for i=1:n
    Dr(i) = (u(i)-M)^2;
end
D = sum(Dr)/n;
disp("D = "); disp(D);
```

Результат работы датчика сложения

Для построения гистограммы использовался массив N = 1000 при a = 565, c =323, m = 56238423983.

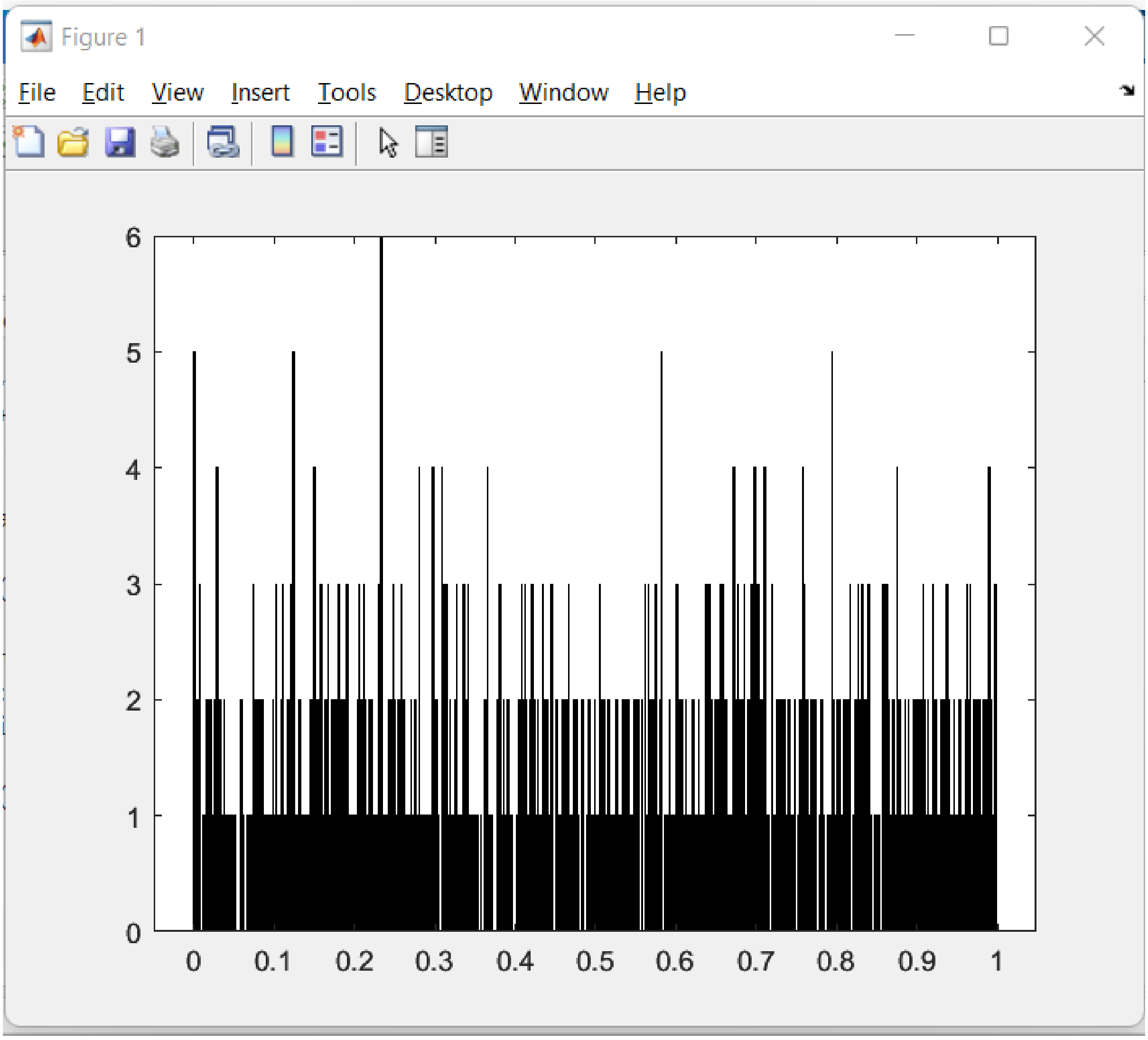


Рисунок 1 – Гистограмма, где размерность массива N равна 1000

```
M =
    0.5086


D =
    0.0852
```

Таблица 1 – Варьируемые параметры для линейного конгруэнтного генератора

вариант / параметры	1	2	3	4	5
m - модуль	6075	6075	6655	7875	7875
a - множитель	106	1366	936	211	421
b - приращение	1283	1283	1399	1663	1663
x_0 - начальное заполнение	20	10	3	6	7

вариант	6	7	8	9	10

параметры					
m - модуль	11979	11979	12960	14000	29282
a - множитель	430	859	1741	1541	419
b - приращение	2531	2531	2731	2957	6173
x_0 - начальное заполнение	5	345	23	265	32

вариант параметры	11	12	13	14	15
m - модуль	29282	31104	53125	81000	86436
a - множитель	1255	625	171	421	1093
b - приращение	6173	6571	11213	17117	18257
x_0 - начальное заполнение	34	45	76	56	98

вариант параметры	16	17	18	19	20
m - модуль	120050	121500	121500	121500	134456
a - множитель	2311	1021	2041	4081	141
b - приращение	25367	25673	25673	25673	28411
x_0 - начальное заполнение	12	35	67	12	32

вариант параметры	21	22	23	24	25
m - модуль	134456	134456	139968	139968	145800
a - множитель	281	8121	205	3877	3661
b - приращение	28411	28411	29573	29573	30809
x_0 - начальное заполнение	23	45	76	24	34

2. Оценить математическое ожидание, оценить дисперсию равномерно распределенной случайной величины - x_n.

Плотность вероятности равномерного распределения на интервале: {2:8}

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{8-2} = \frac{1}{6}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2 \\ \dfrac{x-a}{6} & \text{при } 2 < x \le 8 \\ 1 & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

Искомая вероятность:

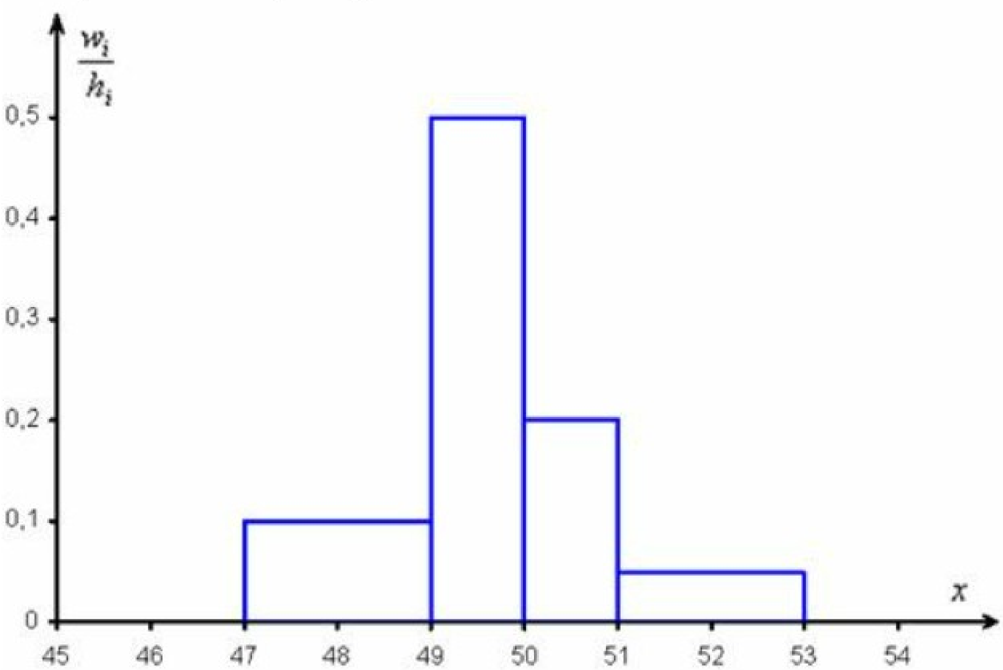
$$p(1 < x < 5) = F(5) - F(1) = \frac{5-2}{6} - 0 = 0{,}5$$

Ответ: $p(1;5) = 0{,}5$.

3. Построить гистограмму для нормированной к единице выборки x_n.

Интервалы		n_i	h_i	x_i	w_i	w_i/h_i	$w_н$
47	49	20	2	48	0,2	0,1	0,2
49	50	50	1	49,5	0,5	0,5	0,7
50	51	20	1	50,5	0,2	0,2	0,9
51	53	10	2	52	0,1	0,05	1
Суммы:		100			1		

Построим гистограмму относительных частот:



4. Сформировать ряд z_n распределенный по нормальному закону:

$$z_n = x_n \cdot \sqrt{\frac{-2\ln(s)}{s}}, \; x_n, x_{n+1} \in (0, 1) \tag{2}$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} \cdot \sqrt{\frac{-2\ln(s)}{s}}, \; x_n, x_{n+1} \in (0, 1) \tag{3}$$

$$s = x_n^2 + x_{n+1}^2, \; s \in (0, 1) \tag{4}$$

или

- $z_1 = \sqrt{-2\ln(u_1)}\cos(2\pi u_2)$
- $z_2 = \sqrt{-2\ln(u_1)}\sin(2\pi u_2)$

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, будет находиться в интервале : (A;B)

$$p(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$$

Получаем:

$$p(22 < x < 24.2) = \Phi\left(\frac{24.2 - 23}{1.6}\right) - \Phi\left(\frac{22 - 23}{1.6}\right) = \Phi(0{,}75) - \Phi(-0{,}625) = 0{,}2734 + 0{,}234 = 0{,}5074$$

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, отклонится от среднего не более чем на величину :b.

$$P(|x - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

По условию

$$P(|x - 23| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{1{,}6}\right) = 0{,}92$$

$$\Phi\left(\frac{\delta}{1{,}6}\right) = \frac{0{,}92}{2} = 0{,}46$$

По таблице значений функции Лапласа:

$$\delta/1{,}6 = 1{,}75 \implies \delta = 1.75 \cdot 1.6 = 2{,}8 \text{ см}$$

$$P(|x - 23| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{1{,}6}\right) = 0{,}98$$

$$\Phi\left(\frac{\delta}{1{,}6}\right) = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49$$

По таблице значений функции Лапласа:

$$\delta/1{,}6 = 2{,}33 \implies \delta = 2.33 \cdot 1.6 = 3{,}73 \text{ см}$$

По правилу трех сигм можно считать, что практически все длины деталей с вероятностью 0.9973 будут заключены в интервале $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$

$P(|x - 23| < 3 \cdot 1.6) = 0.9973$, откуда

$$-3 \cdot 1.6 + 23 < X < 3 \cdot 1.6 + 23$$

$$18{,}2 < X < 27{,}8$$

5. Оценить математическое ожидание, оценить дисперсию случайной величины z_n с нормальным законом распределения, построить гистограмму.

Найдём функцию, обратную к функции распределения:

$u = F(x),$

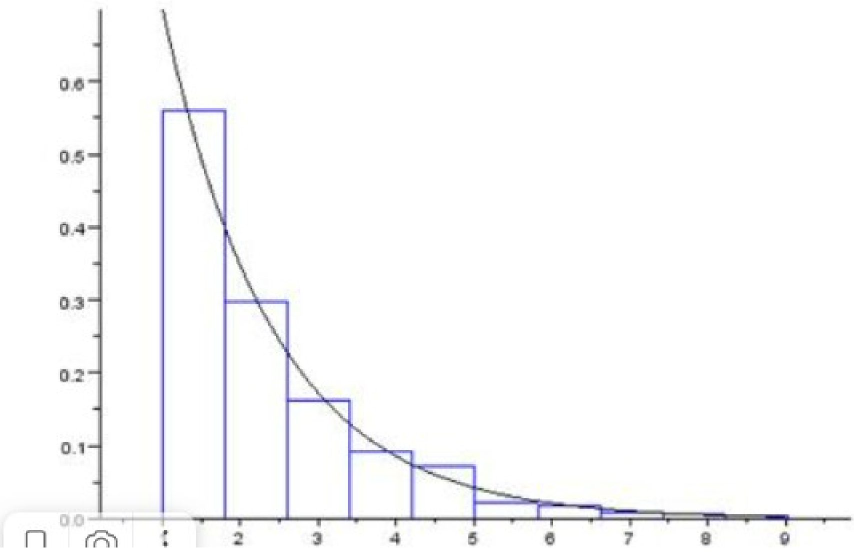
$$u = 1 - e^{-a(x-b)} \Rightarrow 1 - u = e^{-a(x-b)} \Rightarrow -a(x-b) = \ln(1-u) \Rightarrow x = \frac{ab - \ln(1-u)}{a}.$$

Таким образом, $F^{-1}(u) = \begin{cases} \frac{ab - \ln(1-u)}{a}, u \in [0;1], \\ \text{не определена}, u \notin [0;1]; \end{cases}$

Теперь пусть у нас имеется случайная величина $U \sim R_{[0;1]}$. Тогда можно смоделировать случайную величину X как функцию от случайной величины U, обратную функции распределения случайной величины X: $Y = F^{-1}(U)$. Пронаблюдав эту величину n раз, мы получим выборку объёма n.

Итак, у нас имеется выборка объёма n $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полученная при n наблюдениях за случайной величиной X. Требуется построить гистограмму распределения по этой выборке.

Аналогично расчетам из раздела 2.1.1 найдем выборочные максимум, минимум, количество интервалов группировки и ширину интервалов группировки. В нашем случае: $x_{min} = 1.0003159$, $x_{max} = 9.032981$, N = 10, $\Delta = 0.8032665$.



6. Сформировать ряд z_n распределенный по экспоненциальному закону:

$$X_i = -\frac{\ln(1 - U_i)}{\lambda}. \quad (5)$$

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение от 0,2 до 1

$$p(0.2 < x < 1) = e^{-4\cdot 0.2} - e^{-4\cdot 1} = 0{,}431$$

Ответ

$$M(X) = 0.25;\ \sigma = 0.25;\quad p(0.2 < x < 1) = 0.431$$

7. Оценить математическое ожидание, оценить дисперсию случайной величины, имеющей экспоненциальный закон распределения, построить гистограмму.

В силу **непрерывности функции распределения**:
$F(0) = 1 + A\cdot e^0 = 1 + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -1$ – при этом **и только при этом значении** предложенная функция задаёт закон распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Пока, кстати, мы не знаем, что это за закон, ведь вверху я привёл другое определение.

2) Найдём функцию плотности распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

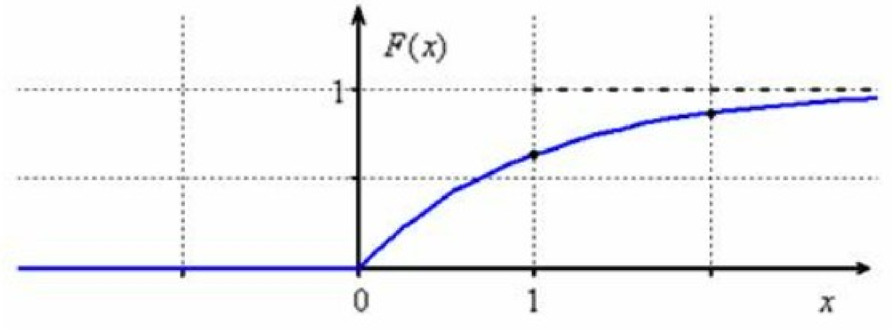
надеюсь, все в ладах с **производной сложной функции**: $(1 - e^{-x})' = 0 - e^{-x}\cdot(-x)' = e^{-x}$.

Ну вот, теперь избушка повернулась к нам передом, а к лесу задом. Поскольку данная функция имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \ge 0 \end{cases}$, то случайная величина X распределена показательно. Даже образцово-показательно, т.к. значение $\lambda = 1$ наиболее приятно.

3) Условие допускает схематическое построение графиков, но зачем занижать планку? Даже при их ручном построении не составляет никакого труда найти пару дополнительных точек и проявить маломальскую аккуратность.

Вычислим пару значений $F(1) = 1 - e^{-1} \approx 1 - 0{,}37 = 0{,}63, \quad F(2) = 1 - e^{-2} \approx 1 - 0{,}14 = 0{,}86$

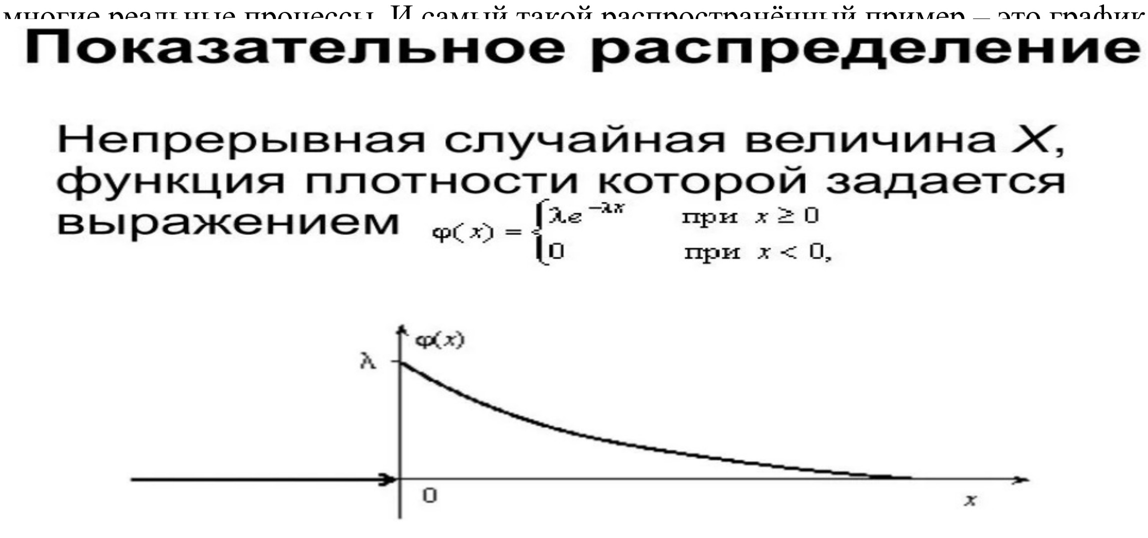
и простенький **предел** $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x} \to 0) = 1$. Таким образом, **прямая** $y = 1$ является **горизонтальной асимптотой** для графика $F(x)$ при $x \to +\infty$



Контрольные вопросы

1. Напишите аналитическое выражение плотности вероятности равномерного закона распределения.
2. Напишите аналитическое выражение плотности вероятности экспоненциального закона распределения.
3. Напишите аналитическое выражение плотности вероятности нормального закона распределения.
4. Приведите график плотности вероятности равномерного закона распределения.
5. Приведите график плотности вероятности нормального закона распределения.
6. Приведите график плотности вероятности экспоненциального закона распределения.
7. Приведите формулу для построения последовательности на основе линейного конгруэнтного генератора.
8. Приведите формулу Бокса-Мюллера.
9. Приведите формулу для построения последовательности распределенной по нормальному закону.

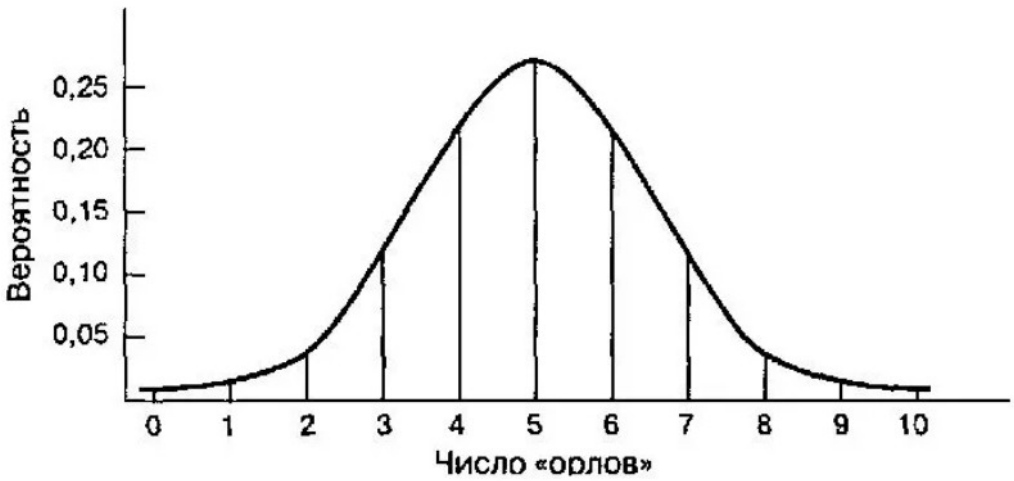
1. Простейшее из **непрерывных распределений**, с помощью которого моделируются многие реальные процессы. И самый такой распространённый пример – это график

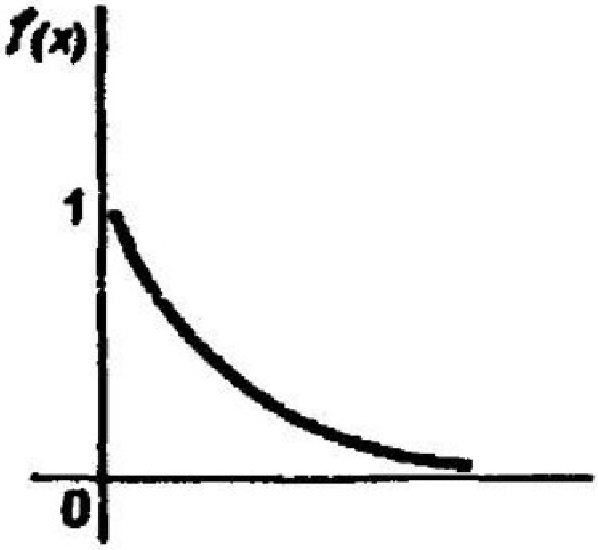


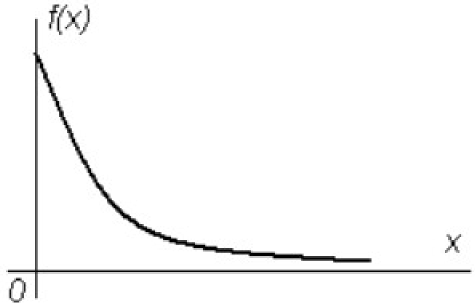
3. Непрерывное распределение вероятностей. Это также называется распределением Гаусса. Функция плотности нормального распределения f (z) называется кривой Белла, потому что она имеет форму, напоминающую колокол.

4.

Нормальное распределение. Нормальный закон распределения состоит в том, что чаще всего встречаются средние значения соответствующих показателей, и чем больше отклонение от этой средней величины в меньшую или большую сторону встречаются одинаково реже чем среднее значение.



5. 

6. 

7. int i;
cin >> i;
srand(i); // установка начального значения
rand();

Функция srnd устанавливает начальное значение **i**.

8. **Преобразование Бокса — Мюллера** — метод моделирования стандартных нормально распределённых случайных величин. Имеет два варианта. Метод является точным, в отличие, например, от методов, основывающихся на центральной предельной теореме.

9.

Общим нормальным распределением вероя тностей непрерывной случайной величины X называется распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Нормальное распределение задается двумя параметрами: a и σ..